

16.1

a) Luvun 8 kaksikantainen logaritmi merkitään $\log_2 8$.

$\log_2 8 = 3$, $\log_2 8$ on se potenssi, johon kantaluku 2
koska $2^3 = 8$. on korotettava, jotta tulokseksi saadaan 8.

b) Luvun 25 viisikantainen logaritmi merkitään $\log_5 25$.

$\log_5 25 = 2$, $\log_5 25$ on se potenssi, johon kantaluku 5
koska $5^2 = 25$. on korotettava, jotta tulokseksi saadaan 25.

c) Luvun 1 000 000 kymmenkantainen logaritmi merkitään $\log_{10} 1\,000\,000$.

$\log_{10} 1\,000\,000 = 6$, $\log_{10} 1\,000\,000$ on se potenssi, johon
koska $10^6 = 1\,000\,000$. kantaluku 10 on korotettava, jotta
tulokseksi saadaan 1 000 000.

Vastaus

a) $\log_2 8 = 3$, koska $2^3 = 8$

b) $\log_5 25 = 2$, koska $5^2 = 25$

c) $\log_{10} 1\,000\,000 = 6$, koska $10^6 = 1\,000\,000$

16.2

a) Luvun 125 viisikantainen logaritmi merkitään $\log_5 125$.

$\log_5 125 = 3$, $\log_5 125$ on se potenssi, johon kantaluku 5
koska $5^3 = 125$. on korotettava, jotta tulokseksi saadaan 125.

b) Luvun 81 kolmekantainen logaritmi merkitään $\log_3 81$.

$\log_3 81 = 4$, $\log_3 81$ on se potenssi, johon kantaluku 3
koska $3^4 = 81$. on korotettava, jotta tulokseksi saadaan 81.

c) Luvun 6 kuusikantainen logaritmi merkitään $\log_6 6$.

$\log_6 6 = 1$, $\log_6 6$ on se potenssi, johon kantaluku 6
koska $6^1 = 6$. on korotettava, jotta tulokseksi saadaan 6.

Vastaus

a) $\log_5 125 = 3$

b) $\log_3 81 = 4$

c) $\log_6 6 = 1$

16.3

a) $7^x = 20$

$$x = \log_7 20 \\ \approx 1,54$$

EkspONENTTI x on luvun 20 seitsemänkantainen logaritmi.

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

b) $2^{3x} = 88$

$$3x = \log_2 88 \quad |:3 \\ x = \frac{\log_2 88}{3} \\ \approx 2,15$$

EkspONENTTI $3x$ on luvun 88 kaksikantainen logaritmi.

Ratkaistaan x .

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

c) $5^{4x} = 78$

$$4x = \log_5 78 \quad |:4 \\ x = \frac{\log_5 78}{4} \\ \approx 0,68$$

EkspONENTTI $4x$ on luvun 78 viisikantainen logaritmi.

Ratkaistaan x .

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

Vastaus

a) $x \approx 1,54$

b) $x \approx 2,15$

c) $x \approx 0,68$

16.4

a) $8^x = 26$

$$x = \log_8 26 \\ \approx 1,57$$

EkspONENTTI x on luvun 26 kahdeksan-
kantainen logaritmi.

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

b) $5^{2x} = 100$

$$2x = \log_5 100 \quad |:2 \\ x = \frac{\log_5 100}{2} \\ \approx 1,43$$

EkspONENTTI $2x$ on luvun 100 viisi-
kantainen logaritmi.

Ratkaistaan x .

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

c) $6^{x+1} = 25$

$$x+1 = \log_6 25 \quad |-1 \\ x = \log_6 25 - 1 \\ \approx 0,80$$

EkspONENTTI $x+1$ on luvun 25 kuusi-
kantainen logaritmi.

Ratkaistaan x .

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

Vastaus

a) $x \approx 1,57$

b) $x \approx 1,43$

c) $x \approx 0,80$

16.5

a) $3 \cdot 2^x = 18$ $|\div 3$

$$2^x = 6$$

$$x = \log_2 6 \\ \approx 2,58$$

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

Eksponentti x on luvun 6 kaksikantainen logaritmi.

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

b) $5 + 7^x = 19$ $|\div -5$

$$7^x = 14$$

$$x = \log_7 14 \\ \approx 1,36$$

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

Eksponentti x on luvun 14 seitsemäkantainen logaritmi.

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

Vastaus

a) $x \approx 2,58$

b) $x \approx 1,36$

16.6

a) $4 \cdot 5^x = 24$ $|\div 4$ Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

$$5^x = 6$$

EkspONENTTI x on luvun 6 viisi-kantainen logaritmi.

$$x = \log_5 6$$

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

$$\approx 1,11$$

b) $1 + 5^{3x} = 16$ $|-1$ Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

$$5^{3x} = 15$$

EkspONENTTI $3x$ on luvun 15 viisi-kantainen logaritmi.

$$3x = \log_5 15 \quad |\div 3$$

Ratkaistaan x .

$$x = \frac{\log_5 15}{3}$$

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

$$\approx 0,56$$

c) $2 - 5^x = 16$ $|-2$ Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

$$-5^x = 14 \quad |\cdot(-1)$$

$$5^x = -14$$

Yhtälöllä $5^x = -14$ ei ole ratkaisuja, koska potenssin 5^x arvo on aina positiivinen luku.

Vastaus

a) $x \approx 1,11$

b) $x \approx 0,56$

c) ei ratkaisuja

16.7

- a) Appletin perusteella kaikki kuvaajat kulkevat pisteen $(1, 0)$ kautta.
- b) Appletin perusteella kuvaajaa ei synny, kun kantaluku on negatiivinen, joten kantaluku a ei voi saada negatiivisia arvoja.

Vastaus

- a) $(1, 0)$
- b) ei voi

16.8

Hannun ratkaisussa on virhe. Eksponentti $2x$ on luvun 8 viisikantainen logaritmi, eikä x , niin kuin Hannu on laskenut. Korjattu ratkaisu on

$$5^{2x} = 8$$

$$2x = \log_5 8 \quad |:2$$

$$x = \frac{\log_5 8}{2}$$

$$x \approx 0,65.$$

16.9

a) Luvun 2 kaksikantainen logaritmi merkitään $\log_2 2$.

$$\log_2 2 = 1, \text{ koska } 2^1 = 2.$$

b) Luvun 1 kaksikantainen logaritmi merkitään $\log_2 1$.

$$\log_2 1 = 0, \text{ koska } 2^0 = 1.$$

c) Luvun $\frac{1}{2}$ kaksikantainen logaritmi merkitään $\log_2 \frac{1}{2}$.

$$\log_2 \frac{1}{2} = -1, \text{ koska } 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}.$$

d) Luvun $\frac{1}{4}$ kaksikantainen logaritmi merkitään $\log_2 \frac{1}{4}$.

$$\log_2 \frac{1}{4} = -2, \text{ koska } 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Vastaus

a) $\log_2 2 = 1$

b) $\log_2 1 = 0$

c) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$

d) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$

16.10

a) $\log_{10} 10^5 = 5$, koska $10^5 = 10^5$.

b) $\log_{10} 1 = 0$, koska $10^0 = 1$.

c) $\log_{10} 0,1 = -1$, koska $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0,1$.

Vastaus

a) $\log_{10} 10^5 = 5$

b) $\log_{10} 1 = 0$

c) $\log_{10} 0,1 = -1$

16.11

a) Luvun 64 kahdeksankantainen logaritmi merkitään $\log_8 64$.

$\log_8 64 = 2$, $\log_8 64$ on se potenssi, johon kantaluku 8
koska $8^2 = 64$. $\log_8 64$ on korotettava, jotta tulokseksi saadaan 64.

b) Luvun 64 neljäkantainen logaritmi merkitään $\log_4 64$.

$\log_4 64 = 3$, $\log_4 64$ on se potenssi, johon kantaluku 4
koska $4^3 = 64$. $\log_4 64$ on korotettava, jotta tulokseksi saadaan 64.

c) Luvun 100 kymmenkantainen logaritmi merkitään $\log_{10} 100$.

$\log_{10} 100 = 2$, $\log_{10} 100$ on se potenssi, johon kantaluku 10
koska $10^2 = 100$. $\log_{10} 100$ on korotettava, jotta tulokseksi saadaan 100.

Vastaus

a) $\log_8 64 = 2$, koska $8^2 = 64$

b) $\log_4 64 = 3$, koska $4^3 = 64$

c) $\log_{10} 100 = 2$, koska $10^2 = 100$

16.12

a) $9^x = 18$

$$x = \log_9 18 \\ \approx 1,32$$

EkspONENTTI x on luvun 18 yhdeksänkertainen logaritmi.

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

b) $7^{3x} = 59$

$$3x = \log_7 59 \quad | :3 \\ x = \frac{\log_7 59}{3} \\ \approx 0,70$$

EkspONENTTI $3x$ on luvun 59 seitsemänkertainen logaritmi.

Ratkaistaan x .

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

c) $3^{x-4} = 10$

$$x - 4 = \log_3 10 \quad | +4 \\ x = \log_3 10 + 4 \\ \approx 6,10$$

EkspONENTTI $x - 4$ on luvun 10 kolme-kertainen logaritmi.

Ratkaistaan x .

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

Vastaus

a) $x \approx 1,32$

b) $x \approx 0,70$

c) $x \approx 6,10$

16.13

a) $3 \cdot 4^x = 27$ $|\div 3$

$$4^x = 9$$

$$x = \log_4 9$$

$$\approx 1,58$$

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

EkspONENTTI x on luvun 9 neljäkantainen logaritmi.

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

b) $3 + 4^{5x} = 57$ $|-3$

$$4^{5x} = 54$$

$$5x = \log_4 54 \quad |\div 5$$

$$x = \frac{\log_4 54}{5}$$

$$\approx 0,58$$

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

EkspONENTTI $5x$ on luvun 54 neljäkantainen logaritmi.

Ratkaistaan x .

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

c) $2 - 3^{4x} = 5$ $|-2$

$$-3^{4x} = 3 \quad |\cdot(-1)$$

$$3^{4x} = -3$$

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

Yhtälöllä $3^{4x} = -3$ ei ole ratkaisuja, koska potenssin 3^{4x} arvo on aina positiivinen luku.

Vastaus

a) $x \approx 1,58$

b) $x \approx 0,58$

c) ei ratkaisuja

16.14

a) Luvun 10 kymmenkantainen logaritmi merkitään $\log_{10} 10$.

$$\log_{10} 10 = 1, \text{ koska } 10^1 = 10.$$

b) Luvun 1 kymmenkantainen logaritmi merkitään $\log_{10} 1$.

$$\log_{10} 1 = 0, \text{ koska } 10^0 = 1.$$

c) Luvun 0,1 kymmenkantainen logaritmi merkitään $\log_{10} 0,1$.

$$\log_{10} 0,1 = -1, \text{ koska } 10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

d) Luvun 0,01 kymmenkantainen logaritmi merkitään $\log_{10} 0,01$.

$$\log_{10} 0,01 = -2, \text{ koska } 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Vastaus

a) $\log_{10} 10 = 1$

b) $\log_{10} 1 = 0$

c) $\log_{10} 0,1 = -1$

d) $\log_{10} 0,01 = -2$

16.15

a) $\log_2 2^7 = 7$, koska $2^7 = 2^7$.

b) $\log_2 1 = 0$, koska $2^0 = 1$.

c) $\log_2 0,5 = -1$, koska $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Vastaus

a) $\log_2 2^7 = 7$

b) $\log_2 1 = 0$

c) $\log_2 0,5 = -1$

16.16

a) Koska muuttujan x kaksikantainen logaritmi on 4 , niin $x = 2^4 = 16$.

b) Koska muuttujan x kymmenkantainen logaritmi on 5 , niin $x = 10^5 = 100\,000$.

c) Koska muuttujan x kaksikantainen logaritmi on -1 , niin $x = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Vastaus

a) $x = 16$

b) $x = 100\,000$

c) $x = 0,5$

16.17

a) 19-vuotiaana Raimo hyppäsi 196 cm. Lasketaan muunnettu tulos.

$$T = 196 + 201,4 \cdot \lg \frac{19}{35} = 142,565... \approx 143 \text{ (cm)}$$

23-vuotiaana Raimo hyppäsi 200 cm. Lasketaan muunnettu tulos.

$$T = 200 + 201,4 \cdot \lg \frac{23}{35} = 163,276... \approx 163 \text{ (cm)}$$

40-vuotiaana Raimo hyppäsi 175 cm. Lasketaan muunnettu tulos.

$$T = 175 + 201,4 \cdot \lg \frac{40}{35} = 186,679... \approx 187 \text{ (cm)}$$

Muunnoskaavan avulla vertailtuna tuloksen paremmuusjärjestyksessä ovat 175 cm, 200 cm ja 196 cm.

- b) Sijoitetaan muunnoskaavaan $T = t + k \lg \frac{a}{35}$ arvot $T = 233$ (cm), $t = 175$ (cm), $k = 201,4$ ja ratkaistaan vakio a .

$$T = t + k \lg \frac{a}{35}$$

Sijoitetaan $T = 233$, $t = 175$ ja $k = 201,4$.

$$233 = 175 + 201,4 \cdot \lg \frac{a}{35} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$a = 67,928\dots$$

$$a \approx 68 \text{ (vuotta)}$$

68-vuotiaana hypätty tulos 175 cm on muunnattuna 233 cm.

Vastaus

a)

Tulos (cm)	Ikä (v)	Muunnettu tulos (cm)
196	19	143
200	23	163
175	40	187

Tulokset paremmuusjärjestyksessä olivat
175 cm, 200 cm ja 196 cm.

b) 68 v

16.18

a) Eksponentti x on luvun 7 viisikantainen logaritmi eli $x = \log_5 7$.

b) CAS-laskimella yhtälön $5^x = 7$ ratkaisuksi saadaan $x = \frac{\ln 7}{\ln 5}$.

c) Merkitään logaritmin $\log_2 34$ arvoa kirjaimella x . Tällöin $2^x = 34$.

Vastaavasti kuten b-kohdassa, yhtälön ratkaisu on $x = \frac{\ln 34}{\ln 2}$, eli

$\log_2 34 = \frac{\ln 34}{\ln 2}$. Ratkaisemalla yhtälö $2^x = 34$ laskimella

päädytään samaan tulokseen, joten

$$\log_2 34 = \frac{\ln 34}{\ln 2} = 5,08746... \approx 5,0875.$$

Vastaus

a) $x = \log_5 7$

b) $x = \frac{\ln 7}{\ln 5}$

c) $\log_2 34 = \frac{\ln 34}{\ln 2} \approx 5,0875$

16.19

- a) Olkoon $10^x = 67$. Tällöin $x = \log_{10} 67$. Näin ollen
 $10^{\log_{10} 67} = 10^x = 67$.
- b) Olkoon x sellainen luku, jolla $10^x = 314$. Tällöin $x = \log_{10} 314$.
Näin ollen $10^{\log_{10} 314} = 10^x = 314$.
- c) Olkoon x sellainen luku, jolla $10^x = 123\,456$. Tällöin
 $x = \log_{10} 123\,456$. Näin ollen $123\,456 = 10^x = 10^{\log_{10} 123\,456}$.

Vastaus

- a) $10^{\log_{10} 67} = 10^x = 67$
b) $10^{\log_{10} 314} = 314$
c) $123\,456 = 10^{\log_{10} 123\,456}$

16.20

Luku 8 voidaan tehtävän 16.19 mukaisesti esittää luvun 10 potenssina muodossa $10^{\log_{10} 8}$.

$$\text{Tällöin } 8^{222\,000} = (10^{\log_{10} 8})^{222\,000} = 10^{222\,000 \cdot \log_{10} 8} \approx 10^{200\,486}.$$

Luku 4 voidaan tehtävän 16.19 mukaisesti esittää luvun 10 potenssina muodossa $10^{\log_{10} 4}$.

$$\text{Tällöin } 4^{444\,000} = (10^{\log_{10} 4})^{444\,000} = 10^{444\,000 \cdot \log_{10} 4} \approx 10^{267\,315}.$$

Lukujen kymmenpotenssiesityksissä luvun $4^{444\,000}$ eksponentti on suurempi, joten se on luvuista suurempi.

Vastaus

Luku $4^{444\,000}$ on suurempi.

16.21

Luku $99\,999$ voidaan tehtävän 16.19 mukaisesti esittää luvun 10 potenssina muodossa $10^{\log_{10} 99\,999}$.

Tällöin

$$\begin{aligned} 99\,999^{2021} &= (10^{\log_{10} 99\,999})^{2021} \\ &= 10^{2021 \cdot \log_{10} 99\,999} \\ &= 10^{10\,104.991\dots} \\ &= 10^{0.991\dots} \cdot 10^{10\,104} \\ &= 9,799\dots \cdot 10^{10\,104}. \end{aligned}$$

Tästä muodosta nähdään, että luvussa $99\,999^{2021}$ on $10\,104 + 1 = 10\,105$ numeroa, joista kaksi ensimmäistä ovat 9 ja 7 .

Vastaus

$10\,105$ numeroa, kaksi ensimmäistä 9 ja 7